Generalized Green functions, unipotent classes and graded Hecke algebras (Combinatorial Representation Theory and Related Topics)

数理解析研究所講究録 1310 巻 2003 年 154-168

Generalized Green functions, unipotent classes and graded Hecke algebras

東京理科大 理工　庄司俊明 (Toshiaki Shoji)
Science University of Tokyo

1. 問題の発端

1.1. G を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結な簡約代数群, $F: G \to G$ を $\mathbf{F}_q$ 構造に付随する G の Frobenius 写像とする. G の F による固定点からなる有限群 G^F を有限簡約群という. G^F の表現論の基本的な問題は $\mathbf{C}$ 上の既約表現を全て決定し, その既約指標を計算することである. この問題は 1980 年代以降, Lusztig が強力に推進し、現在ほぼ完成したことになっている. Lusztig の構想による G^F の既約指標を統一的に計算するためのプログラムは次のようなものである. 以下では l 進 cohomology を使うために, $\mathbf{C}$ の代わりに, l 進数体 $\mathbf{Q}_l$ の代数的閉包 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の表現や指標を考える (l は $\mathbf{F}_q$ の標数 p と異なる素数): よく知られているように G^F の既約指標の全体は, G^F の類関数全体のなす $\bar{\mathbf{Q}}_l$ ベクトル空間 $\mathcal{U}$ の正規直交基底をなす. Lusztig は Deligne-Lusztig の一般指標 $R_T^G(\theta)$ の既約指標への分解を調べる過程で, 概指標と呼ばれる G^F の類関数を導入した. 概指標は, 既約指標の線形結合として明示的に定義され, G^F の概指標の全体はやはり $\mathcal{U}$ の正規直交基底をなす. 一方, Lusztig は指標層の理論を創始して, G の F 不変指標層の特性関数として得られる G^F の類関数の全体がやはり $\mathcal{U}$ の正規直交基底になることを示し, またこれらの特性関数を計算する統一的な algorithm が存在することを示した. このような状況のもとに Lusztig は概指標と特性関数達がスカラー倍を除いて一致することを予想した. Lusztig の予想が成立しそこに表れるスカラーが決定されれば, G^F の既約指標を計算する統一的な algorithm が得られることになる. これが Lusztig のプログラムである. (なお指標層に関する結果については標数 p に対する弱い条件 “p : almost good” がつく).

G の中心が連結な場合, Lusztig の予想は筆者により確かめられた. なお G の中心が不連結の場合既約指標の分類は一応できているが, 中心が連結な場合に比べて分類自体が effective でないということもあり概指標の定義もまだ確定していない (Lusztig の扱った

のは中心が連結の場合). 指標層については, 中心が連結, 不連結に拘らず議論が進行する. そこが幾何的理論の強みであろうか.

1.2. ところで, 指標層の特性関数を計算する algorithm が存在すると前段に書いたが実はこれにも問題が残っている. それを説明するために Lusztig の algorithm をもう少し詳しく見てみよう. G^F の Green 関数の拡張として指標層の理論により一般 Green 関数が定義される. 一般 Green 関数は G^F の巾単類の集合 G^F_{uni} 上の G^F 不変関数である. 指標層の特性関数の計算はこの一般 Green 関数の計算に帰着される. 今, $\mathcal{N}_G$ を G の巾単類 C と C 上の G 同変単純 ($\bar{\mathbf{Q}}_l$-) 局所系 $\mathcal{E}$ の組 $(C,\mathcal{E})$ 全体の集合とする. $u \in C$ を固定すると, C 上の G 同変単純局所系の全体は有限群 $A_G(u) = Z_G(u)/Z^0_G(u)$ の既約指標の全体と自然に対応する. そこで, $\mathcal{N}_G$ は組 (u,ρ) の集合とみることもできる. ただし, u は G の巾単類の代表元を動き, ρ は $A_G(u)$ の既約指標を全て動く. $\mathcal{N}_G$ には自然に F が作用する. ここで, $\mathcal{U}_{\mathrm{uni}}$ を G^F_{uni} 上の G^F 不変な関数全体のなす $\bar{\mathbf{Q}}_l$ ベクトル空間とする. 以下簡単のため, G^F は split type (Chevalley 型) と仮定し, 各 $i = (u,\rho) \in \mathcal{N}^F_G$ に対し, $\widetilde{Y}_i \in \mathcal{U}_{\mathrm{uni}}$ を

$$\widetilde{Y}_i(g) = \begin{cases} \rho(a) & g \text{ が } u_a \text{ に } G^F \text{ 共役な場合} \\ 0 & g \notin C^F \text{ の場合} \end{cases}$$

により定義する. ただし, $u \in C^F$ は F が $A_G(u)$ に自明に作用するように選んでおく. (split type ではこれが可能). このとき, C^F の G^F 共役類は $A_G(u)$ の共役類と 1 対 1 に対応する. $a \in A_G(u)$ に対応する C^F の G^F 共役類の代表元を u_a と表す.

$\widetilde{Y}_i$ は $\mathcal{U}_{\mathrm{uni}}$ に含まれ, $i = (u,\rho)$ が $\mathcal{N}^F_G$ の元をすべて動くとき, $\widetilde{Y}_i$ 達は $\mathcal{U}_{\mathrm{uni}}$ の基底をなすことが容易に確かめられる. 一般 Green 関数は $\mathcal{U}_{\mathrm{uni}}$ の元なので, $\widetilde{Y}_i$ 達の線形結合で表される. $\widetilde{Y}_i$ は具体的によく分かった関数なので, 各 $\widetilde{Y}_i$ の係数が明示的に決まれば, 一般 Green 関数が定まったことになる. しかし Lusztig の algorithm は一般 Green 関数を $\widetilde{Y}_i$ ではなく関数 Y_i の線形結合として明示的に与えるのである. ここに, Y_i は $Y_i = \varepsilon_i\widetilde{Y}_i$ ($\varepsilon_i \in \bar{\mathbf{Q}}^*_l$) を満たすある関数であり, 未知のスカラー ε_i がそこに登場する. 一般 Green 関数を後ろ指を指されることなく決定するためには, 次の問題が避けて通れない.

問題 1. スカラー ε_i ($i \in \mathcal{N}^F_G$) を具体的に決定せよ

Green 関数の決定は問題 1 の特別な場合にあたる. p が good の場合, [BS], [S1], [S2] により Green 関数は完全に決定されている. 一般には, 問題 1 は G が単連結な単純群の場合に帰着する. この小論では, G が SL_n, かつ $p \gg 0$ の場合 ($p > n$ なら十分) に ε_i が

決定できることを報告したい. G^F が split type のときは, この問題はさほど難しくなく, Green 関数を決定する際に用いた議論 (split unipotent class の決定) を援用できる. しかし, G^F が non-split type のときは, Green 関数の場合とは本質的に異なる状況が現れる. この場合は Lusztig のアイディアに従って, graded Hecke algebra の理論 [L2] を利用する. ただし, graded Hecke algebra の一般論は $\mathbf{C}$ 上の代数群に対して構成されているので、標数 p の代数群に適応する形に修正する必要がある.

注意 1.3. 前節に述べたように Lusztig 予想が確かめられているのは G の中心が連結の場合である. そこで当面の関心は中心が連結な場合に指標層の特性関数を計算することにある. G の中心が連結の場合には問題 1 もやさしい. しかし, 中心が連結の場合の特性関数が目標でも, 問題 1 を一般の状況で解決しておく必要がある. それは, $R_T^G(\theta)$ の指標公式と同様に, 特性関数の $g = su$ (Jordan 分解) での値の決定が, G^F の半単純元 s の中心化群 $Z_G^0(s)$ の一般 Green 関数の計算に帰着されるからである. G の中心が連結でも $Z_G^0(s)$ の中心が連結になるとは限らない.

2. Cuspidal 局所系と一般 Springer 対応

2.1. この節で何故 Lusztig の algorithm において ε_i のような不定性が生じるのか簡単に説明しておこう. 同時にスカラー ε_i を決定する問題をより扱いやすい問題に置き換える. それは, G の巾単類に関する一般 Springer 対応と, ある種の cohomology 群への Frobenius 写像の固有値の決定に関係してくる. ここでは細かい定義は省略してあるので興味のある方は [L1, V] を参照して下さい.

C を G の巾単類とする. C 上の G 同変単純局所系 $\mathcal{E}$ は次の条件をみたすとき, cuspidal な局所系と言われる. また C と $\mathcal{E}$ の組 $(C, \mathcal{E})$ を cuspidal pair という; $P = LU_P$ を G の放物部分群 ($\neq G$) とするとき, L の任意の巾単元 u に対して, $H_c^\delta(uU_P \cap C, \mathcal{E}) = 0$ が成り立つ. ただし $\delta = \dim C - \dim C(u)$, $C(u)$ は u を含む L の巾単類.

さて L を G の放物部分群 P の Levi 部分群, $\mathcal{E}$ を L の巾単類 C 上の L 同変単純局所系で $(C; \mathcal{E})$ が L の cuspidal pair になるものとする. 組 $(C, \mathcal{E})$ から指標層の induction によって得られる G 上の偏屈層を K とおく. K は半単純な G 同変偏屈層であり, $\operatorname{End} K \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l[W]$ が成り立つ. ここで, $W = N_G(L)/L$ は Coxeter 群になっている. 半単純偏屈層 K は

$$K \simeq \bigoplus_{\chi \in W^\wedge} V_\chi \otimes K_\chi \tag{2.1.1}$$

と分解できる．ただし $W^\wedge$ は W の既約指標全体の集合, K_χ は既約指標 χ に対応する単純偏屈層, V_χ はその重複度の空間を表す．さて, K の巾単多様体 G_{uni} への制限 $K|_{G_{\mathrm{uni}}}$ も(次数シフトを除いて)半単純偏屈層になることが知られている．一方, G_{uni} 上の G 同変単純偏屈層はすべて $(C', \mathcal{E}') \in \mathcal{N}_G$ に対する交差コホモロジー複体 $\mathrm{IC}(\bar{C}', \mathcal{E}')[\dim C']$ により得られるので

$$(2.1.2) \qquad K|_{G_{\mathrm{uni}}} \simeq \bigoplus_{(C',\mathcal{E}') \in \mathcal{N}_G} V_{(C',\mathcal{E}')} \otimes \mathrm{IC}(\bar{C}', \mathcal{E}')[\dim C']$$

と分解できる．そこで, 各 $\chi \in W^\wedge$ に対して, $K|_{G_{\mathrm{uni}}} \simeq \mathrm{IC}(\bar{C}', \mathcal{E}')$ (次数シフトを除く) となる $(C', \mathcal{E}') \in \mathcal{N}_G$ が一意的に定まり, 写像 $W^\wedge \to \mathcal{N}_G, \chi \mapsto (C', \mathcal{E}')$ が定義される．今, $\mathcal{M}_G$ を 組 $(L, C, \mathcal{E})$ の G 共役による同型類の全体とする．ただし, L は G の放物部分群の Levi 部分群, $\mathcal{E}$ は L の巾単類 C 上の cuspidal 局所系である．このとき対応 $\chi \mapsto (C', \mathcal{E}')$ により全単射

$$(2.1.3) \qquad \coprod_{(L,C,\mathcal{E}) \in \mathcal{M}_G} (N_G(L)/L)^\wedge \simeq \mathcal{N}_G$$

が得られる．これを G の巾単類と (相対) Weyl 群の間の一般 Springer 対応という．

2.2. ここで G の $\mathbf{F}_q$ 構造を考える．L を G の F 不変な放物部分群の F 不変な Levi 部分群とする．cuspidal 局所系の分類から C は F 不変であり, $\mathcal{E}$ は $F^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ を満たす．同型 $\varphi_0 : F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ を一つ固定するとそれから同型 $\varphi : F^*K \xrightarrow{\sim} K$ が自然に定まる．更に簡単のため, G は split type と仮定すると, F は $W = N_G(L)/L$ に自明に作用する．このとき K の分解 (2.1.1) により各 $\chi \in W^\wedge$ に対して同型 $\varphi_\chi : F^*K_\chi \xrightarrow{\sim} K_\chi$ が定まり, 一般 Springer 対応 $\chi \leftrightarrow (C', \mathcal{E}')$ により $F^*\,\mathrm{IC}(\bar{C}', \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{IC}(\bar{C}', \mathcal{E}')$ が得られる．$\mathrm{IC}(\bar{C}', \mathcal{E}')$ の 0 次の cohomology sheaf の C' への制限は $\mathcal{E}'$ に一致するので, 結局同型 $\psi_\chi : F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ が得られる．$\mathcal{E}'$ の ψ_χ に関する特性関数 $\chi_{\psi_\chi} : C'^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l,\ g \mapsto \mathrm{Tr}\,(\psi_\chi, \mathcal{E}'_g)$ (を適当に正規化したもの) が前に述べた Lusztig の関数 Y_i $(i = (C', \mathcal{E}'))$ に他ならない ($\mathcal{E}'_g$ は $\mathcal{E}'$ の $g \in C'$ での茎を表す)．同型 $F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ を標準的に選ぶと, それに関する $\mathcal{E}'$ の特性関数は $\tilde{Y}_i$ に一致する．$\mathcal{E}'$ は単純局所系なので, 同型 $F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ はスカラー倍を除いて一意的であり, これより $Y_i = \varepsilon_i \tilde{Y}_i$ と表されることが分かる．

関数 Y_i は最初の φ_0 の選び方にもよるし, また指標層の induction のプロセスにも影響を受ける．Lusztig の指標層の理論では, 多くの事柄が Y_i により明示的に記述されるの

である．この Y_i を具体的に記述せよ，つまり写像 ψ_χ を決定せよ，というのが問題 1 (スカラー ε_i の決定) の意味である．

2.3. 同型写像 $\psi_\chi : F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ の決定は G が単連結な単純群の場合に考えればよい．さらにそれは以下に述べるように G の Lie 環に関する同様の問題に帰着される．G を単純，単連結とし $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする．標数 p を大きく取っておくと，Bardsley-Richardson 写像 $\log : G \to \mathfrak{g}$ により，G の cuspidal 局所系や一般 Springer 対応をめぐる議論が $\mathfrak{g}$ に移植される．実際，$\mathfrak{p}, \mathfrak{l}$ をそれぞれ P, L の Lie 環とし，$\mathfrak{n}_P$ を $\mathfrak{p}$ の巾零根基とする．$\mathcal{O}$ を $\mathfrak{l}$ の巾零軌道，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{O}$ の cuspidal 局所系とする．また，$\mathcal{O}'$ を $\mathfrak{g}$ の巾零軌道，$\mathcal{L}'$ を $\mathcal{O}'$ の G 同変単純局所系とすると $\mathcal{M}_G$ は，対応 $(L, C, \mathcal{E}) \leftrightarrow (\mathfrak{l}, \mathcal{O}, \mathcal{L}), \log(C) = \mathcal{O}, \mathcal{E} = \log^* \mathcal{L}$ により，組 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O}, \mathcal{L})$ の集合と同一視され，$\mathcal{N}_G$ は，$\log C' = \mathcal{O}', \log^* \mathcal{L}' = \mathcal{E}'$ により，組 $(\mathcal{O}', \mathcal{L}')$ の集合と同一視される．

$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を上の通りとし，$y \in \mathcal{O}'$ に対して

$$\mathcal{P}_y = \{gP \in G/P \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}y \in \mathcal{O} + \mathfrak{n}_P\},$$
$$\widehat{\mathcal{P}}_y = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}y \in \mathcal{O} + \mathfrak{n}_P\},$$

とおき次の図式を考える．

(2.3.1)
$$\mathcal{O} \xleftarrow{\alpha} \widehat{\mathcal{P}}_y \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_y.$$

ただし，$\alpha : \widehat{\mathcal{P}}_y \to \mathcal{O}$ は $g \in \widehat{\mathcal{P}}_y$ に $\mathrm{Ad}(g)^{-1}y$ の $\mathcal{O}$ への射影を対応させる写像，$\beta : \widehat{\mathcal{P}}_y \to \mathcal{P}_y$ は $\beta(g) = gP$ で定まる写像を表す．$\mathcal{O}$ 上の局所系 $\mathcal{L}$ に対し，$\alpha^*\mathcal{L} \simeq \beta^*\dot{\mathcal{L}}$ となる $\mathcal{P}_y$ 上の局所系 $\dot{\mathcal{L}}$ が唯一つ存在する．

$$m = \mathrm{codim}_{\,\mathfrak{g}}\, \mathcal{O}' - \mathrm{codim}_{\,\mathfrak{l}}\, \mathcal{O}$$

とおく．$m = 2 \dim \mathcal{P}_y$ である．$\mathcal{L}$ 係数の l 進 cohomology $H_c^i(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ を考える ($\mathcal{P}_y$ は G/P の閉集合ではないことに注意)．spectral sequence の議論から，

(2.3.2)
$$H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}) \simeq \mathcal{H}_u^{m-r}(K)$$

が成り立つ．ただし，右辺は G の偏屈層 K の $m - r$ 次の cohomology sheaf の $u \in C'$ での茎を表す；$\log(u) = y, r = \dim G - \dim L + \dim C + \dim Z^0(L)$ である．(2.3.2) によ

り $H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})$ 上に $W\times A_G(y)$ の作用が定義される. ρ を $\mathcal{L}'$ に対応する $A_G(y)$ の既約指標とすると, $H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})$ の ρ-isotypic part $H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})_\rho$ は $W\times A_G(y)$ 加群として $\chi\otimes\rho$ と表される. ここに χ は W の既約指標となり, 対応 $(y,\rho)\leftrightarrow\chi$ が一般 Springer 対応 $(\mathcal{O}',\mathcal{L}')\leftrightarrow\chi$ を実現している.

さて, $(\mathfrak{l},\mathcal{O},\mathcal{L})\in\mathcal{M}_G^F$ に対し, $\varphi_0: F^*\mathcal{L}\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}$ を次のように選ぶ: $y_0\in\mathcal{O}^F$ を取り, $(\varphi_0)_{y_0}:\mathcal{L}_{y_0}\to\mathcal{L}_{y_0}$ が恒等写像になるように φ_0 を取る. ただし, $\mathcal{L}_{y_0}$ は $\mathcal{L}$ の y_0 での茎, $(\varphi_0)_{y_0}$ は φ_0 より誘導された $\mathcal{L}_{y_0}$ 上の線形写像である. ($\mathcal{L}$ は単純局所系なので, φ_0 はこの条件で一意的に定まる). (2.3.1) により, φ_0 は $F^*\dot{\mathcal{L}}\xrightarrow{\sim}\dot{\mathcal{L}}$ を導き, 線形写像 $\Phi: H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})\to H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})$ を引き起こす. さらに, $\chi\in W^\wedge$ が F 不変と仮定すると, Φ より $\Phi_\chi: H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})_\rho\to H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})_\rho$ が得られる. 先に述べた $\psi_\chi: F^*\mathcal{E}'\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}'$ の決定は, 線形写像 Φ_χ の決定と同値であることが知られている ([L1, V]). そこで問題 1 は次の問題 2 に置き換えられる.

問題 2. 与えられた $y_0\in\mathcal{O}^F$, $\varphi_0: F^*\mathcal{L}\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}$ に対し, 線形写像 $\Phi_\chi: H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})_\rho\to H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})_\rho$ を各 $\chi\in W^\wedge$ に対して決定せよ.

今までは, G が split type の場合しか説明しなかったが, もう少し精密な議論をすることにより, non-split type の場合にも問題 1, 問題 2 は定式化できる. 指標層の特性関数を計算するためには, もちろん non-split な場合を含めて考える必要がある. 以下, $G=SL_n$ の場合に (split, non-split を込めて) 問題 2 を考える.

注意 2.4. Green 関数が関係するのは, 組 $(L,C,\mathcal{E})\in\mathcal{M}_G$ が $L=T$: 極大トーラス, $C=\{e\}$, $\mathcal{E}=\bar{\mathbf{Q}}_l$: 定数層, の場合にあたる. この場合, $H_c^m(\mathcal{P}_y,\dot{\mathcal{L}})=H^m(\mathcal{B}_y,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ となる. ただし, B を T を含む Borel 部分群として $\mathcal{B}_y=\{gB\in G/B\mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}y\in\mathrm{Lie}\,B\}$, $m=2\dim\mathcal{B}_y$ である. $y\in\mathcal{O}'^F$, B: F 不変とすれば $\mathcal{B}_y$ は F 不変になり F は $H^m(\mathcal{B}_y,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ 上の線形写像 Φ を引き起こす. $y\in\mathcal{O}'^F$ を上手に取れば, Φ は $H^m(\mathcal{B}_y,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ 上に $q^{m/2}$ 倍のスカラー写像により作用するというのが 問題 2 の答である. この様な $y\in\mathcal{O}'^F$ を split な巾単 (巾零) 元という. split 巾単元は随伴群への像によって完全に決定される. (p: good の場合, E_8 の一つの類を除いて split 巾単元は存在することが確かめられている. E_8 の残りの場合も Frobenius 写像の記述はできる ([BS]). これにより Green 関数が例外群に対して計算された ([BS], [S1]).

3. SL_n の場合

3.1. まず, $G = SL_n$ の場合の一般 Springer 対応を [LS] に従って説明しよう. しばらくの間 G の $\mathbf{F}_q$ 構造は考えない. n' を n の p と素な最大因子とすると, G の中心 Z_G は $Z_G \simeq \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$ を満たす. $d \mid n'$ となる整数 $d \geq 1$ を固定する. L を G の (標準的) 放物部分群 P の Levi 部分群で, $A_{d-1} \times A_{d-1} \times \cdots \times A_{d-1}$ (n/d 個の成分) の型のものとする. $\mathcal{O}$ を $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}\, L$ の正規巾零軌道とし, $y_0 \in \mathcal{O}$ を取る. このとき, $A_L(y_0) \simeq \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ であり, $(\mathcal{O}, \mathcal{L}) \leftrightarrow (y_0, \rho_0)$ が $\mathfrak{l}$ の cuspidal pair になるための条件は $\rho_0 \in A_L(y_0)^\wedge$ の位数が d であること, つまり $\rho_0 : \mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ が単射になることである. このような組 $(\mathfrak{l}, \mathcal{O}, \mathcal{L})$ の集合が $\mathcal{M}_G$ に一致する.

$W = N_G(L)/L$ は対称群 $\mathfrak{S}_{n/d}$ に同型であり, 一般 Springer 対応 $W^\wedge \to \mathcal{N}_G, \chi \mapsto (\mathcal{O}', \mathcal{L}')$ は次のように記述される. χ は $\mathfrak{S}_{n/d}$ の既約指標なので, n/d の分割 $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r)$ により $\chi = \chi^{\lambda'}$ と表される. n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ を $\lambda_i = d\lambda'_i$ により定義する. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の巾零軌道は n の分割によりパラメトライズされ, λ に対応する巾零軌道を $\mathcal{O}' = \mathcal{O}'_\lambda$ とおく. $y \in \mathcal{O}'$ とすると, $A_G(y) \simeq \mathbf{Z}/n'_\lambda\mathbf{Z}$ となる. ただし n'_λ は $\{n', \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ の最大公約数である. $Z_G \simeq \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$ より自然な全射 $f_0 : Z_G \to A_L(y_0)$, $f : Z_G \to A_G(y)$ が存在する. 今 準同型 $\xi : Z_G \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ を $\xi = \rho_0 \circ f_0$ により定義する. $\rho \in A_G(y)^\wedge$ を $\xi = \rho \circ f$ を満たす唯一の元とする. このとき, (y, ρ) に対応する組 $(\mathcal{O}', \mathcal{L}')$ が 対応 $\chi \mapsto (\mathcal{O}', \mathcal{L}')$ を与える.

G^F が split type, つまり SL_n の標準的な Frobenius 写像の場合, L, P はともに F 不変であり, F は $W = N_G(L)/L$ に自明に作用する. $\varphi_0 : F^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ を $y_0 \in \mathcal{O}^F$ により定まる同型写像とする. このとき次の結果が成立する.

定理 3.2. *$G = SL_n$, F は split type とする. $y_0 \in \mathcal{O}^F$, $y \in \mathcal{O}'^F_\lambda$ を Jordan 標準形に取る. このとき, $\Phi : H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}) \to H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ は $q^{m/2}$ 倍のスカラー写像で与えられる.*

定理 3.2 は $\mathcal{P}_y$ に適当な filtration を考えることにより, n に関する帰納法で示すことができる. この場合, Lie 環に移行せず直接 SL_n で議論できるので, 標数 p に関する制限は落せる. また以下に述べる graded Hecke algebra に関する議論は ($p \gg 0$ のもとに) split type, non-split type の双方に適用できる.

3.3. 以下 F が non-split type の場合を考える. $F = \sigma F_0$ とする. F_0 は標準的な Frobenius 写像, σ は SL_n のグラフ自己同型である (ここでは $g \in SL_n$ に対し,

$\sigma(g)=w_1{}^tg^{-1}w_1^{-1}$ に取る; w_1 は $\mathfrak{S}_n$ の最長元に対応する置換行列). 3.1 節の L はやはり F 不変であり, F は $W=N_G(L)/L$ に Coxeter 群の位数 2 の自己同型として作用する. w_0 を $W=\mathfrak{S}_{n/d}$ の最長元とする. Fw_0 は (共役の作用に関して) W と可換になる. I の正則巾零軌道 $\mathcal{O}$ は F 不変であるが, $y_0\in\mathcal{O}^F$ の取り方, また $\mathfrak{g}$ の巾零軌道 $\mathcal{O}'$ に対する $y\in\mathcal{O}'^F$ の取り方には split type の場合と違って注意が肝要である. まず, $y\in\mathcal{O}'^F$ の取り方から説明する. $\mathbf{F}_q$ の 2 次拡大 $\mathbf{F}_{q^2}$ 上の n 次元ベクトル空間を V_0, その基底を $e_1,\dots,e_n$ とする. V_0 上の sesquilinear form $\langle\,,\,\rangle$ を $\langle\sum a_ie_i,\sum b_je_j\rangle=\sum_i a_ib_{n-i}^q$ により定義する. このとき, $x\in\mathfrak{g}^{F^2}$ に対し, $x\in\mathfrak{g}^F$ となる必要十分条件は $\langle xv,w\rangle+\langle v,xw\rangle=0$ が すべての $v,w\in V_0$ に対して成り立つことである.

$\nu=(d,d,\dots,d)$ を n の分割とする. $\mathcal{O}'^F_\nu$ の特別な代表元 y_1 を構成しよう. $d'=[d/2]$ ($[\cdot]$ は Gauss 記号), $t=n/d$ とおき, V_0 の基底 $\{f_j^{(i)}\mid 1\le i\le t, 1\le j\le d\}$ を次のように定める. $1\le i\le t, 1\le j\le d'$ に対し,

$$f_j^{(i)}=e_{(i-1)d'+j},\quad f_{d-j+1}^{(i)}=e_{n-(i-1)d'+j}.$$

d が偶数ならばこれで基底 $\{f_j^{(i)}\}$ が定まる. d が奇数の場合, 残りの $e_{td'+1},\dots,e_{td'+t}$ で張られた空間の基底 $f_{d'+1}^{(1)},\dots f_{d'+1}^{(t)}$ を

$$\begin{aligned}
f_{d'+1}^{(1)}&=\frac{1}{a}(e_{td'+1}+e_{td'+t}),\quad f_{d'+1}^{(2)}=\frac{1}{a}(e_{td'+1}-e_{td'+t}),\\
f_{d'+1}^{(3)}&=\frac{1}{a}(e_{td'+2}+e_{td'+t-1}),\quad f_{d'+1}^{(4)}=\frac{1}{a}(e_{td'+2}-e_{td'+t-1})
\end{aligned}$$

のように定める. ここで $a\in\mathbf{F}_{q^2}$ は $a^{q+1}=2$ となる元である. 最後に t が奇数ならば, $t=2t'+1$ に対して, $f_{d'+1}^{(t)}=e_{td'+t'+1}$ を付け加える. 定義より,

$$\begin{aligned}
\langle f_j^{(i)},f_{d-j+1}^{(i)}\rangle&=\begin{cases}(-1)^{i-1} & j=d-j+1, i\ne t-i+1 \text{ の場合},\\ 1 & \text{その他の場合},\end{cases}\\
\langle f_j^{(i)},f_k^{(i')}\rangle&=0\quad i\ne i' \text{ の場合}
\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで V_0 の線形変換 $y_1 \in \mathfrak{g}^{F^2}$ を

$$y_1 f_j^{(i)} = \begin{cases} f_{j+1}^{(i)} & \text{if } 1 \le j \le d'-1, \\ (-1)^{\delta_i} f_{j+1}^{(i)} & \text{if } j = d', \\ -f_{j+1}^{(i)} & \text{if } d'+1 \le j \le d-1, \\ 0 & \text{if } j = d, \end{cases}$$

により定義する．ただし，$i \ne t-i+1$ の場合 $\delta_i = i-1$，その他の場合 $\delta_i = 0$ である．

$$\{y_1^j f_1^{(i)} \mid 1 \le i \le t, 0 \le j \le d-1\}$$

は V_0 の基底になり，sesquilinear form に関する条件から $y_1 \in \mathfrak{g}^F$ となることが分かる．これより，$y_1 \in \mathcal{O}'^F_\nu$ が得られる．

より一般に，n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ で各 λ_i が d の倍数になっているものに対し，$y_\lambda \in \mathcal{O}'^F_\lambda$ を次のように構成する．λ に付随する V_0 の基底 $\{h_j^{(i)} \mid 1 \le i \le r, 1 \le j \le \lambda_i\}$ を

$$h_j^{(i)} = y_1^b f_1^{((\lambda_1+\cdots+\lambda_{i-1})/d+a)}$$

で定義する．ここに a, b は $j = ad+b, 0 \le b < d$ を満たす非負整数である．各 $1 \le i \le k$ に対し，$y_\lambda \in \mathfrak{g}^{F^2}$ を

$$y_\lambda h_j^{(i)} = \begin{cases} h_{j+1}^{(i)} & \text{if } j < \lambda_i, \\ 0 & \text{if } j = \lambda_i. \end{cases}$$

により定義する．sesquilinear form に関する条件より，実際 $y_\lambda \in \mathfrak{g}^F$ となることが分かる．したがって $y_\lambda \in \mathcal{O}'^F_\lambda$ が得られる．

最後に $y_0 \in \mathcal{O}^F$ を決める．$\mathfrak{l} \simeq \mathfrak{sl}_d \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}_d$ (t 個) であり，σ は成分の置換，第 1 成分と第 t 成分，第 2 成分と第 $t-1$ 成分，... として作用する．$y_0 = (x_1, \ldots, x_t) \in \bigoplus \mathfrak{sl}_d$ を $1 \le i \le [t/2]$ に対して $x_{t-i+1} = \sigma(x_i)$ で定める．ここに x_i は3.1で取ったような $\mathfrak{sl}_d^{F_0}$ に含まれる正則巾零元である．さらに t が奇数の場合は，$x_{(t+1)/2}$ を上で選んだ $\mathfrak{sl}_d^F$ の元 ($n = d$ の場合の y_1) とする．このようにして $y_0 \in \mathcal{O}^F$ が定まる．

y_0 は $\mathfrak{l}$ の正則巾零元であるから，$\mathfrak{g}$ の巾零軌道 $\mathcal{O}'_\nu$ に含まれる．特に y_1 は y_0 に G 共役になる．従って ある $c \in A_G(y_0)$ により $y_1 = (y_0)_c$ (c による twisted element) と表される．$c_1 \in Z_G$ を $f(c_1) = c$ となるように取る．このとき $\xi(c_1) \in \bar{\mathbb{Q}}_l^*$ は c_1 の取り方によらず ρ_0 のみで定まる．そこで $\xi(c_1) = \eta(\rho_0)$ と表す．次の定理が成り立つ．

定理 3.4. $G = SL_n$, F は *non-split type* とする．また $p \gg 0$ とする．このとき，Φw_0 は $H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ に $\eta(\rho_0)(-q)^{m/2}$ 倍のスカラー写像として作用する．

3.5. 定理 3.4 は graded Hecke algebra の理論を利用して証明される．次節以降にその概略を示すが，ここでは何故他の方法ではうまくいかないかを説明しておく．まず，F が split の時のような帰納法による議論はうまく行かない．それは split の時と違って，A_{n-2} 型の放物部分群は F 不変にならず，SL_{n-1} の場合に帰着するのが難しいことによる．この事情は Green 関数の場合も同様だが，$G = GL_n$ で，F が non-split の場合にどのように，$\Phi_\chi : H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}) \to H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ が決まったか思い出しておこう．この場合，$L = T$ は極大トーラス，$P = B$ は G の Borel 部分群に一致する．$\mathcal{O} = \{0\}$, $\mathcal{L}$ は $\mathcal{O}$ 上の定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ に過ぎない．$\mathfrak{gl}_n$ の巾零軌道 $\mathcal{O}'$ と $y \in \mathcal{O}'^F$ に対して，$\mathcal{P}_y$ は $\mathcal{B}_y = \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}y \in \mathfrak{b}\}$ となる．ただし Lie$B = \mathfrak{b}$ とおいた．$H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}) = H^m(\mathcal{B}_y, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ であり，$y \in \mathcal{O}'^F$ ならば F は自然に $H^m(\mathcal{B}_y, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ に作用する．問題 2 はこの F の作用を記述せよということに他ならない．この場合，w_0 を Weyl 群 $W = N_G(T)/T \simeq \mathfrak{S}_n$ の最長元とすると，Fw_0 は $H^{2i}(\mathcal{B}_y, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ に $(-q)^i$ のスカラー倍で作用する．それは次のように示される．$\mathcal{B}_y \hookrightarrow \mathcal{B} = G/B$ は W 同変かつ F 同変な写像 $\pi : H^{2i}(\mathcal{B}, \bar{\mathbf{Q}}_l) \to H^{2i}(\mathcal{B}_y, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ を導く．$\mathcal{B}_y$ は affine space による分割を持ち，それと $\mathcal{B}$ の cell 分割を比較することにより π が全射になることが分かる．そこで Fw_0 の $H^{2i}(\mathcal{B}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ への作用が分かればいいが，これは $\mathcal{B}$ の cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ が W の coinvariant algebra に同型なることから得られる．

さて，SL_n の場合，$\mathcal{P}_{y_\lambda} \leftrightarrow \mathcal{B}_y$ に対して $\mathcal{B}$ の役割を果たすのは $\mathcal{P}_{y_1}$ であるが，一般に $\mathcal{P}_{y_\lambda}$ は $\mathcal{P}_{y_1}$ の部分多様体にはならない．ならないけれども，cohomology のレベルでは写像 $H_c^m(\mathcal{P}_{y_1}, \dot{\mathcal{L}}) \to H^m(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ が構成できる．しかし，この写像が全射になるかどうかは簡単には分からない．また，$H_c^*(\mathcal{P}_{y_1}, \dot{\mathcal{L}})$ の構造も coinvariant algebra と比較するような訳にも行かない．ということで，GL_n の場合の $\mathcal{B}_y$ に対する議論は $\mathcal{P}_y$ の $\dot{\mathcal{L}}$ 係数 cohomology にはなかなか適用できないのである．

4. Graded Hecke algebras

4.1. graded Hecke algebra は同変 cohomology への作用を基にして Lusztig [L2] により構成された．それは affien Hecke algebra の退化版であり，degenerate affine Hecke algebra と呼ばれることも多い．affine Hecke algebra の表現が同変 K-theory を用いて記述されるのに対し，graded Hecke algebra の表現は同変 cohomology により記述され，ある

意味で affine Hecke algebra の場合より扱いやすい. ここでは, 同変 cohomology への作用が重要な意味を持つので, Lusztig に従って graded Hecke algebra と呼ぶことにする.

4.2. まず, Lusztig による 同変 cohomology の代数的な構成について説明する. [L2] では, $\mathbf{C}$ 上の多様体に対する同変 cohomology が議論されているが, 我々の目標は $H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ への Frobenius 作用にあるので, l 進 cohomology を利用して標数 p の多様体に関する同変 cohomology を構成する. [L2] で証明された基本的な事柄は, 適当に変形することにより, 標数 p の状況に対しても概ね拡張できる.

k を $\mathbf{F}_q$ の代数的閉包とし, k 上定義された代数多様体 X とそれに代数的に作用するアファイン代数群 M を考える. 正の整数 m に対し, 滑らかな既約 M 多様体 Γ で, $\Gamma \to M\backslash\Gamma$ が局所自明な principal G-fibration を持ち, $i = 1, \ldots, m$ に対して $H^i(\Gamma, \bar{\mathbf{Q}}_l) = 0$ を満たすものが存在する. 実際 Γ は以下のように構成できる. M を GL_r の閉部分群として埋め込み, 次の埋め込みを考える.

$$M \subset GL_r \times \{e\} \subset GL_r \times GL_{r'} \subset GL_{r+r'}.$$

そこで r' を十分大きく取り ($2r' \geq m+2$ なら十分), $\Gamma = (\{e\} \times GL_{r'})\backslash GL_{r+r'}$ とおけばよい. さて M 多様体 X に対し, ${}_\Gamma X = M\backslash(\Gamma \times X)$ (M の $\Gamma \times X$ への対角作用に関する商) とおく. $\mathcal{E}$ を X 上の M 同変局所系とするとき, $\pi^*({}_\Gamma\mathcal{E}) \simeq p^*\mathcal{E}$ を満たす ${}_\Gamma X$ の局所系 ${}_\Gamma\mathcal{E}$ が唯一つ存在する. ただし, $\pi : \Gamma \times X \to M\backslash(\Gamma \times X)$ は自然な写像, $p : \Gamma \times X \to X$ は第 2 成分への射影を表す. $j \leq m$ に対し,

$$H_M^j(X, \mathcal{E}) = H^j({}_\Gamma X, {}_\Gamma\mathcal{E}), \quad H_j^M(X, \mathcal{E}) = H_c^{2d-j}({}_\Gamma X, {}_\Gamma\mathcal{E}^*)^*$$

と定義する. ここに $d = \dim({}_\Gamma X)$, $\mathcal{E}^*$ は $\mathcal{E}$ の双対局所系, $H_c^i(\cdot)^*$ は $H_c^i(\cdot)$ の双対空間を表す). (以上は $M \neq \{e\}$ の場合であるが, $M = \{e\}$ の場合には, $H_M^j(X, \mathcal{E}) = H^j(X, \mathcal{E})$, $H_j^M(X, \mathcal{E}) = H_c^{2\dim X - j}(X, \mathcal{E}^*)^*$ と定めておく.) $H_M^j(X, \mathcal{E}), H_j^M(X, \mathcal{E})$ は m, Γ の取り方によらず定まり, それぞれ X の同変 cohomology、同変 homology と呼ばれる. また $\mathcal{E}$ が定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ の場合はそれらを $H_M^j(X), H_j^M(X)$ と表す. cup 積により, $H_M^*(X) = \bigoplus_j H_M^j(X)$ は単位元 1 を持つ次数付き $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 代数となり,

$$H_M^*(X, \mathcal{E}) = \bigoplus_j H_M^j(X, \mathcal{E}), \quad H_*^M(X, \mathcal{E}) = \bigoplus_j H_j^M(X, \mathcal{E})$$

は graded $H_M^*(X)$ 加群になる. さらに, $H_M^*(\mathrm{point}), H_*^M(\mathrm{point})$ の代わりに H_M^*, H_*^M と表す. 写像 $X \to \mathrm{point}$ は次数を保存する $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 代数の準同型 $\varepsilon : H_M^* \to H_M^*(X)$ を誘導し, ε により, $H_M^*(X,\mathcal{E}), H_*^M(X,\mathcal{E})$ は H_M^*-加群とみなされる.

注意 4.3. G を $\mathbf{C}$ 上定義された代数群, $\mathfrak{g}_r$ を G の reductive quotient $G_r = G/\mathrm{Ru}\,G$ の Lie 環とする. $S(\mathfrak{g}_r^*) = \bigoplus_j S^j(\mathfrak{g}_r^*)$ を $\mathfrak{g}_r$ の双対空間 $\mathfrak{g}_r^*$ 上の対称多元環とする. G は coadjoint action により $S(\mathfrak{g}_r^*)$ に作用する. このとき, 次が知られている.

$$H_G^j \simeq \begin{cases} S^{j/2}(\mathfrak{g}_r^*)^G & j : \text{偶数の場合}, \\ 0 & j : \text{奇数の場合}. \end{cases}$$

しかし, G が $\mathbf{F}_q$ 上定義された簡約群の場合, H_G^j は $\bar{\mathbf{Q}}_l$ ベクトル空間, $S(\mathfrak{g}^*)$ は k 上の代数, であるから上の式は直接的な意味を持たない. このあたりに標数 p の同変 cohomology と $\mathbf{C}$ 上の同変 cohomology の違いが表れて来る.

4.4. M が連結代数群の場合, 同変 homology $H_j^M(X,\mathcal{E})$ は次の意味で通常の cohomology と関係している. 各 i に対し, F^i を $\bigoplus_{j\le i} H_j^M(X,\mathcal{E})$ で生成された $H_*^M(X,\mathcal{E})$ の H_M^* 部分加群とする. $i<0$ のとき $F^i = 0$ であり, filtration $F^0 \subset F^1 \subset F^2 \subset \cdots$ が得られる. $\Pi_i = H_i^M(X,\mathcal{E})/H_i^M(X,\mathcal{E}) \cap F^{i-1}$ とおくと, Π_i は次数付き加群 F^i/F^{i-1} の第 i 成分に一致する. 次数付き加群 $\Pi_i \to F^i/F^{i-1}$ の埋め込み (Π_i は i 成分以外は 0 の次数付き加群とみる) を利用して, H_M^* 線形写像

$$H_M^* \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_l} \Pi \to F^i/F^{i-1} \tag{4.4.1}$$

が得られる. 一方, 標準的準同型 $H_i^M(X,\mathcal{E}) \to H_i^{\{e\}}(X,\mathcal{E})$ は $H_i^M(X,\mathcal{E}) \cap F^{i-1}$ 上で 0 となり, $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 線形写像

$$\Pi_i \to H_i^{\{e\}}(X,\mathcal{E}) \tag{4.4.2}$$

を誘導する. Lusztig は [L2] で, $H_c^{\mathrm{odd}}(X,\mathcal{E}) = 0$ の場合, (4.4.1), (4.4.2) は共に同型になり, 従って同型

$$H_M^* \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_l} H_i^{\{e\}}(X,\mathcal{E}) \simeq F^i/F^{i-1} \tag{4.4.3}$$

が得られることを示した. この場合さらに $H_{\mathrm{odd}}^M(X,\mathcal{E}) = 0$ も成り立つ.

4.5. ここで定理 3.4 の設定に戻り, $G = SL_n, \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, P, L 等を前の通りとする. $T = Z_L^0$ を L の中心 Z_L の連結成分, $X(T)$ を T の指標群とし, $\mathfrak{h}^* = \bar{\mathbf{Q}}_l \otimes_{\mathbf{Z}} X(T)$ とおく. 記号がちょっと奇妙だが $\mathfrak{h}^*$ はT の Lie 環の双対空間の役割を果たす. 注意 4.3 に述べたように, $\mathbf{C}$ の場合と違って Lie 環との直接対応がないので, その代わりである. $W = N_G(L)/L$ は Coxeter 群になり, 生成系 $\{s_1, \ldots, s_m\}$ が標準的に定まる. 対応するルート系も定義され $\mathfrak{h}^*$ の部分集合とみなすことが出来る. ここで $\mathbf{S}$ をベクトル空間 $\mathfrak{h}^* \oplus \bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の対称代数とする. $\mathbf{S}$ は $\mathbf{S} \simeq S(\mathfrak{h}^*) \otimes \bar{\mathbf{Q}}_l[\mathbf{r}]$ と表される. ただし, $\bar{\mathbf{Q}}_l[\mathbf{r}]$ は $\mathbf{r} = (0,1) \in \mathfrak{h}^* \oplus \bar{\mathbf{Q}}_l$ を不定元とする多項式環である. $\mathbf{H} = \mathbf{S} \otimes \bar{\mathbf{Q}}_l[W]$ とおく. Lusztig [L2] は $\mathbf{H}$ が以下の条件により $1 \otimes e$ を単位元とする $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の結合代数になることを示した.

(i) $\xi \mapsto \xi \otimes e$ は $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 代数の準同型 $\mathbf{S} \to \mathbf{H}$ を与える,

(ii) $w \mapsto 1 \otimes w$ は $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 代数の準同型 $\bar{\mathbf{Q}}_l[W] \to \mathbf{H}$ を与える,

(iii) $(\xi \otimes e) \cdot (1 \otimes w) = \xi \otimes w, \quad (\xi \in \mathbf{S}, w \in W)$,

(iv) $(1 \otimes s_i)(\xi \otimes e) - ({}^{s_i}\xi \otimes e)(1 \otimes s_i) = c_i \mathbf{r} \frac{\xi - {}^{s_i}\xi}{\alpha_i} \otimes e, \quad (\xi \in \mathbf{S}, 1 \le i \le m)$.

ここに, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ は単純ルート系, $c_1, \ldots, c_m$ は $\mathfrak{l}$ の巾零軌道 $\mathcal{O}$ より定まる定数 ([L3, Prop. 2.12]), 今の場合は, 各 i に対して $c_i = 2n/d$ である. $\mathbf{H}$ を $(\mathfrak{l}, \mathcal{O}, \mathcal{L}) \in \mathcal{M}_G$ に付随する graded Hecke algebra という.

4.6. 同変 homology $H_*^M(X, \mathcal{E})$ の構成を以下の場合に適用する. $X = \mathcal{P}_y$, $\mathcal{E} = \dot{\mathcal{L}}$ または $\mathcal{E} = \dot{\mathcal{L}}^*$ とする. ($\dot{\mathcal{L}}^*$ は $\mathcal{L}$ の双対層 $\mathcal{L}^*$ から得られたもの). $\mathbf{G}_m = k^*$ を k の乗法群とすると $G \times \mathbf{G}_m$ は $\mathfrak{g}$ に $(g_1, t) : x \mapsto t^{-2}\operatorname{Ad}(g_1)x$ により作用する. $y \in \mathfrak{g}$ に対し, $M_G(y)$ を $G \times \mathbf{G}_m$ の作用における y の固定化群とする.

$$M_G(y) = \{(g_1, t) \in G \times \mathbf{G}_m \mid Ad(g_1)y = t^2 y\} \simeq Z_G(y) \times \mathbf{G}_m$$

である. $\dot{\mathcal{L}}$ は $M_G(y)$ 同変局所層であり, 特に, $M = M(y)^0$ ($M_G(y)$ の単位元での連結成分) に対する同変 homology $H_*^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)$ が定義される. 次の定理が成り立つ.

定理 4.7 (Lusztig [L2]). $H_*^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)$ の上に次の性質をみたす $\mathbf{H}$ の表現が定義できる.

(i) $\mathbf{H}$ の作用は $H^*_{M^0(y)}$ の作用と可換.

(ii) W の作用は各 $H_{2i}^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)$ を保存する. ($H_{2i+1}^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*) = 0$ も成り立つ).

(iii) $S(\mathfrak{h}^*) = \bigoplus_{i \ge 0} S_i$ は *cup* 積として作用する. すなわち

$$S_1 : H_{2i}^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*) \to H_{2i+2}^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*).$$

4.8. ここで $S(\mathfrak{h}^*) \simeq H_T^*$, $\mathbf{S} \simeq H_{T\times\mathbf{G}_m}^*$ となっていることにも注意しておく. 一方 $H_{M^0(y)}^*$ の構造を考える. $M^0(y) \simeq Z_G^0(y) \times \mathbf{G}_m$ である. $T(y)$ を $Z_G^0(y)$ の極大トーラス, $W(y)$ を $Z_G^0(y)$ の極大簡約部分群の $T(y)$ に関する Weyl 群とする. そのとき $H_{M^0(y)}^*$ は $S(V^*)^{W(y)} \otimes \bar{\mathbf{Q}}_l[\mathbf{r}]$ と同一視できる. ただし $V^* = \bar{\mathbf{Q}}_l \otimes_{\mathbf{Z}} X(T(y))$ とおいた. 従って, $H_{M^0(y)}^*$ は $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上のアファイン多様体 $V_1 = V/W(y) \times \bar{\mathbf{Q}}_l$ の座標環と見ることができる (V は V^* の双対空間). そこで V_1 の各点 v に対して, 準同型 $H_{M^0(y)}^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l, f \mapsto f(v)$ が定義できる. 準同型 v により, 不定元 $\mathbf{r}$ は $r_0 \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ に特殊化される. $H_{M^0(y)}^*$ 加群 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ に対して

$$E_{v,\rho} = (\bar{\mathbf{Q}}_l \otimes_{H_{M^0(y)}^*} H_*^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*))_\rho$$

とおく. ただし, $\rho \in A_G(y)^\wedge \simeq (M_G(y)/M_G^0(y))^\wedge$ であり, V_ρ は $M_G(y)/M_G^0(y)$ 加群 V の ρ 同型成分を表す. (正確には, v との関係で ρ の取り方には少し制限がつく). 次の結果は標準 $\mathbf{H}$ 加群に関する Lusztig の定理 ([L3, Theorem 8.17) から得られる.

定理 4.9. 適当に v, ρ を選ぶことにより $E_{v,\rho}$ は単純 $\mathbf{H}$ 加群になる.

5. 定理 3.4 の証明

5.1. 定理 3.4 の証明の大筋を説明する. 先に述べたように $\varphi_0 : F^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ が $H_c^*(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ 上の線形変換 Φ を誘導する. 同変 homology の構成の仕方から φ_0 はまた $H_*^{M^0(y_\lambda)}(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}}^*)$ 上の線形変換 Ψ を誘導する. ところで, $G = SL_n$ の場合, $H_c^m(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ は既約 W 加群であり, Φw_0 がすべての $w \in W$ と可換であることから, Φw_0 は $H_c^m(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ の上にスカラー倍で作用することが分かる. 次の補題が基本的である.

補題 5.2. 今, Φw_0 が $H_c^m(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ の上に $\zeta \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ によるスカラー倍で作用するとする. このとき, Φw_0 は $H_c^0(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ 上に スカラー倍 $\zeta(-q^{-1})^{m/2}$ により作用する.

$y = y_\lambda$ とおく. $E_v = E_{v,\rho}$ が単純 $\mathbf{H}$ 加群になるように (v, ρ) を取る. (この場合, ρ は一意的に決まってしまう). 線形変換 Ψw_0 は $E_v = \bar{\mathbf{Q}}_l \otimes_{H_{M^0(y)}^*} H_*^{(M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)$ への作用を引き起こす. さらに 4.4 の filtration を利用することにより, 仮定から $H_0^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)$ で生成された E_v の $H_{M^0(y)}^*$ 部分加群 (それを $\bar{\mathbf{Q}}_l \otimes \langle H_0^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)\rangle$ と表す) 上に Ψw_0 は ζ^{-1} によるスカラー倍で作用することが分かる. 一方, $\mathbf{H} = \mathbf{S} \otimes \bar{\mathbf{Q}}_l[W]$, $\mathbf{S} = S(\mathfrak{h}^*) \otimes \bar{\mathbf{Q}}_l[\mathbf{r}]$ において, $\mathbf{r}$ は $r_0 \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ によるスカラー倍の作用 ($\mathbf{r}$ は $\mathbf{H}$ の中心に含まれる) になり, W は各 $H_{2i}^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)$

上に Ψw_0 と可換になる様に作用する. また, $S(\mathfrak{h}^*) \simeq H_T^* \simeq \bigoplus_{i\geq 0} H_T^{2i}$ において, Fw_0 は H_T^{2i} の上に $(-q)^i$ のスカラー倍で作用することが確かめられる. これらの事と, E_v が単純 $\mathbf{H}$ 加群ということから, Ψw_0 が $\bar{\mathbf{Q}}_l \otimes \langle H_m^{M^0(y)}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)\rangle$ 上にスカラー倍 $\zeta^{-1}(-q)^{m/2}$ で作用することが導かれる. 再び filtration により, Φw_0 は $H_c^0(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}) \simeq H_m^{\{e\}}(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}}^*)^*$ 上に $\zeta(-q^{-1})^{m/2}$ で作用する. これより補題 5.2 が得られる.

補題 5.2 により, Φw_0 の決定には $H_c^0(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ を調べればよいことになる. それについて次の二つの補題が成り立つ.

補題 5.3. Φ の作用と可換な同型写像 $H_c^0(\mathcal{P}_{y_1}, \dot{\mathcal{L}}) \simeq H_c^0(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}}) \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l$ が存在する. さらに, W はどちらにも自明に作用する.

補題 5.4. $y_0 \in \mathcal{O} \subset \mathfrak{l}$ を前の通りとする. Φ は $H_c^0(\mathcal{P}_{y_0}, \dot{\mathcal{L}})$ に自明に作用する.

補題 5.4 により, Φ の $H_c^0(\mathcal{P}_{y_1}, \dot{\mathcal{L}})$ への作用は記述できる. 従って補題 5.3 より, Φ の $H_c^0(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ への作用が決まり, 補題 5.2 により $H_c^m(\mathcal{P}_{y_\lambda}, \dot{\mathcal{L}})$ が決まる. 以上が定理 3.4 の証明の概略である.

注意 5.5. (i) 他の古典群, $Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n}$ の場合は SL_n の場合よりも簡単になると思われる. 多分 Green 関数の場合の方法が適用できるだろう.

(ii) $Spin_N$ の場合が問題になるが、この場合は SL_n と同様に graded Hecke algebra が使えるだろう. この方法がうまく行くのは, $H_c^i(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})$ 上に $A_G(y)$ が $\rho \in A_G(y)^\wedge$ により isotypic に作用している場合である. さもないと $H_c^0(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})_\rho = 0$ になり, $H_c^m(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})_\rho$ と $H_c^0(\mathcal{P}_y, \dot{\mathcal{L}})_\rho$ が比較できない事態が起こる. $Spin_N$ の (cuspidal pair が SO_N に対応していない) 場合はこの条件を満足している.

References

[BS] W.M. Beynon and N. Spaltenstein, Green functions of finite Chevalley groups of type E_n (n = 6,7,8), J. Algebra **88** (1984), 584–614.

[L1] G. Lusztig, Character sheaves, I Adv. in Math. **56** (1985), 193–237, II Adv. in Math. **57** (1985), 226–265, III, Adv. in Math. **57** (1985), 266–315, IV, Adv. in Math. **59** (1986), 1–63, V, Adv. in Math. **61** (1986), 103–155.

[L2] G. Lusztig, Cuspidal local systems and graded Hecke algebras, I, Publ. Math. I.H.E.S. **67** (1988), 145-202.

[LS] G. Lusztig and N. Spaltenstein, On the generalized Springer correspondence for classical groups, Advanced Studies in Pure Math. Vol. **6** (1985), pp.289–316.

[S1] T. Shoji, On the Green polynomials of Chevalley groups of type F_4, Comm. in Alg. **10**, (1982), 505–543.

[S2] T. Shoji, On the Green polynomials of classical groups, Invent. Math. **74**, (1983), 237–267.